Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Septiembre-Diciembre 2011

Nombre: ______________________

Carnet: ______________ Sección: ______

MA-3111-1:30 p.m.—Segundo Parcial, miércoles 07-12-11, 50%—C

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER; $a \in \mathbb{R},\ c > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
La expresión $1_{(-c,c)}(x)$ indica la función que vale 1 para $-c < x < c$ y 0 en otro caso.

$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$
$f(x-a)$	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$e^{iax}f(x)$	$\hat{f}(\omega - a)$
$f(ax)$	$(1/\lvert a\rvert)\hat{f}(\omega/a)$
$f_{gen}^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$
$x^n f(x)$	$i^n \hat{f}_{gen}^{(n)}(\omega)$
$e^{-cx^2/2}$	$(1/\sqrt{2\pi c})e^{-\omega^2/2c}$

$1/(c^2+x^2)$	$(1/2c)e^{-c\lvert\omega\rvert}$
$e^{-c\lvert x\rvert}$	$c/[\pi(c^2+\omega^2)]$
$(\operatorname{sen} cx)/x$	$(1/2)1_{(-c,c)}(\omega)$
$1_{(-c,c)}(x)$	$(\operatorname{sen} c\omega)/\pi\omega$
1	$\delta(\omega)$
$\delta(x)$	$1/2\pi$
$f(x)g(x)$	$\hat{f} * \hat{g}(\omega)$

$\hat{f}(\omega) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$
$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$
$\mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)$
$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega$

---

1. (12 ptos.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $2\pi-$periódica dada en el intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ por $f(\theta) = \pi^2 - \theta^2$.
   (a) Calcular la serie de Fourier real de $f(\theta)$.
   (b) Usando la parte (a) calcule
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

2. (15 ptos.) Halle la solución $u(x,y)$ al problema siguiente:
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ u(x,0) = u(x,2) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,y) = 0, & 0 < y < 2, \\ u(1,y) = -1 & \end{cases}$$

3. (13 ptos.) Halle la solución moderada (atemperada) $u(x,t)$ del problema
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \delta(x-1) & \end{cases}$$

4. (10 ptos.) Calcule la integral
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x + x^3}\,dx$$